Exercice 9

1) $f(x)=e^{-x^2+2x}$ $D_f=\mathbb{R}$.

la fonction $u: x\to u(x)=-x^2+2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(\mathbb{R})=]-\infty,1]$ or la fonction e^x est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty,1]$

$$\boxed{(uov(x))'=v'(x)\times u'(v(x))}$$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x)=\left(-x^2+2x\right)'e^{-x^2+2x}$$

$$\boxed{f'(x)=(-2x+2)e^{-x^2+2x}}$$

2) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2-1}}$

f est définie si $x^2-1\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

f est **dérivable** sur D_f (fonction composée donc même travail que la question précédente) et on a

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2-1}\right)'.e^{\frac{-1}{x^2-1}}.$$

Or $\left(-\frac{1}{x^2-1}\right)'=-\left(\frac{1}{x^2-1}\right)'$

$$=-\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=\frac{2x}{x^2-1}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{U}\right)'=-\frac{U'}{U^2}}$$

Donc : $\boxed{f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}e^{-\frac{1}{x^2-1}}}$

3) $f(x)=e^{\sqrt{x^2-x-2}}$ f est définie si : $x^2-x-2\geq 0$

On a : $x^2-x-2=0$, $a-b+c=0$

Donc $x'=-1$; $x''=-\frac{c}{a}=2$

Etude de signe :

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0 $-$	0	$+$

Donc $D_f=]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$.

f est dérivable si $x^2-x-2>0$

Donc pour $x\in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$ on a :

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)'.e^{\sqrt{x^2-x-2}}$$

Avec $(\sqrt{x^2-x-2})'=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$

$$\boxed{\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$$

Donc $\forall x\in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}e^{\sqrt{x^2-x-2}}}$$

4) $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

f est définie et dérivable si et seulement si

$e^{2x}-1\neq 0\Leftrightarrow e^{2x}\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0$

D'où $D_f=\mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$f'(x)=\frac{\left(e^{2x}+1\right)'\left(e^{2x}-1\right)-\left(e^{2x}-1\right)'\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)-2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{2\left[e^{4x}-e^{2x}-e^{4x}-e^{2x}\right]}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{u^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-4e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}^*}$$

Exercice 10

$f(x)=2e^{2x}-e^x$.

1) $D_f=\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(2e^x-1\right)=+\infty$